Refuerzo escolar 2022

Área de Matemática

Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Probabilidad

Recurso bibliográfico para el fortalecimiento de capacidades pedagógicas

Estimado docente, a continuación, se va facilitar un recurso bibliográfico del Ministerio de Educación, relacionado a las fichas de refuerzo escolar; esto con el propósito de que se empleen en las reuniones de trabajo colegiado para el fortalecimiento de sus capacidades pedagógicas.

PRESENTACIÓN

En la vida cotidiana ocurren muchos eventos cuyos resultados no se pueden predeterminar con exactitud por diversas razones, pues la mayoría de los hechos están influenciados por factores externos. Por otro lado, en aquellos sucesos que están directamente influenciados por la casualidad, es decir, por procesos donde no se está seguro de lo que va a ocurrir, la probabilidad nos permite acercarnos a ellos y estudiarlos.

El presente fascículo empieza con una motivación que vincula ciertas situaciones con la incertidumbre y, posteriormente, es complementada con la propuesta de aprendizajes esperados y la recuperación de saberes previos que, conviene enfatizar desde el inicio, debe acompañar en todo el proceso a los estudiantes.

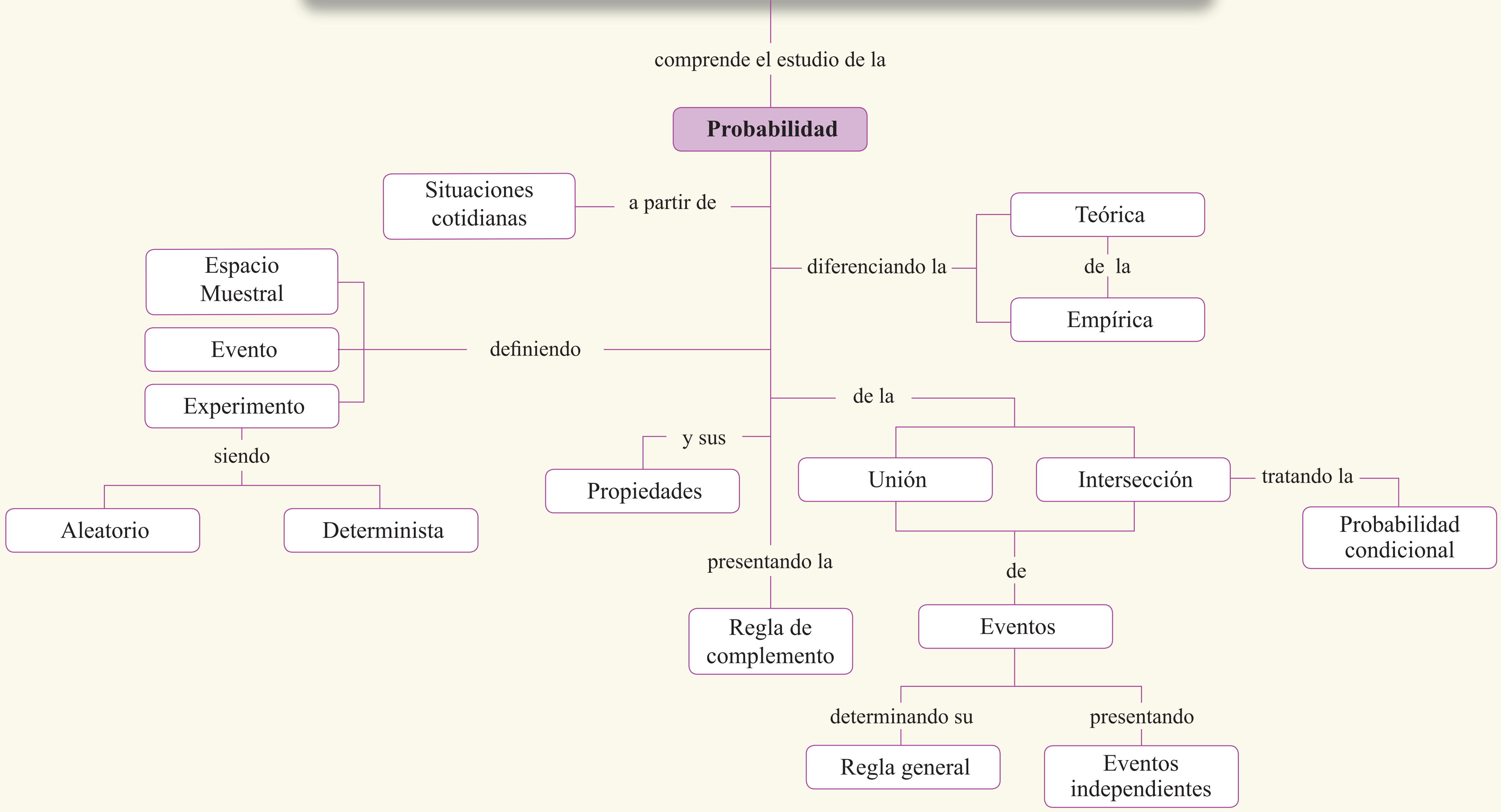
Los contenidos han sido desarrollados a partir de situaciones de la vida cotidiana, así como de artículos periodísticos, los cuales han sido analizados a través de los conceptos básicos del tratamiento del azar para luego presentar otras situaciones problemáticas que aclaren los conceptos y las propiedades de las probabilidades. Luego, a través del análisis de situaciones problemáticas, se deduce las reglas para calcular la probabilidad de la unión e intersección de eventos, así como el complemento de la probabilidad de ellos.

Cada capítulo está acompañado de una serie de ejemplos prácticos y motivadores, referidos a experiencias próximas a los estudiantes, y de actividades pensadas para favorecer un aprendizaje basado en la actividad de estos.

Complementamos el fascículo con estrategias de aprendizaje, metacognición, evaluación, chistes matemáticos, curiosidades matemáticas, bibliografía y enlaces *web*.

Índice

TRATAMIENTO DEL AZAR



para estudiantes de 3ro. 4to. y 5to. de secundaria

TRATAMIENTO *del* AZAR

Motivación

Huracán Katrina

El Huracán Katrina fue la undécima tormenta del año 2005 a la que se le asignó un nombre. Asimismo, fue el primero que alcanzó la categoría 5 en la temporada de huracanes de ese año. Y como si eso fuera poco, el Katrina se ha constituido, por su magnitud, en el sexto huracán más fuerte en la historia de las tormentas registradas.

Fue un gran ciclón tropical que azotó el sur y el centro de los Estados Unidos en agosto de 2 005. Produjo grandes destrozos en Florida, Bahamas, Luisiana y Misisipi, incluyendo cuantiosos daños materiales, humanos e inundaciones.

Los fenómenos naturales no son previsibles, sin embargo, el estudio y seguimiento sistemático de estos podría ayudar a predecirlos con cierto margen de error. La posibilidad de predecir estos fenómenos podría ayudar a salvar muchas vidas si se toman las medidas preventivas del caso, sea que ocurran o no.

La probabilidad de una manera sistemática y más cercana a la realidad, nos proporciona información más precisa y confiable y, por tanto, más útil para las diferentes disciplinas humanas.

(Extracto adaptado del artículo traducido al español "Huracán Katrina". Para mayor información visita la página http://es.wikipedia.org/wiki/Katrina).

LOGROS DE APRENDIZAJE

- Interpreta conceptos sobre probabilidad de un evento, y los aplica en la resolución de situaciones problemáticas, manifestando seguridad.
- Interpreta y calcula correctamente la probabilidad de un evento, a través de diferentes estrategias, manifestando orden y perseverancia.
- Analiza situaciones problemáticas que involucran la probabilidad de la unión de eventos, aplicando las reglas pertinentes.
- Reconoce y aplica las reglas de la probabilidad de la intersección de eventos, a través de la resolución de situaciones problemáticas, manifestando seguridad.

■ RECUPERACIÓN DE SABERES PREVIOS

Lee y resuelve en tu cuaderno.

- Realiza las siguientes operaciones:

  a. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ b. $1-\frac{7}{12}$ c. $\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}$

- Dados: $A = \{2; 3; 4; 7; 5\}$ y $B = \{1; 2; 3; 4; 10\}$

  Determina: a. $A \cup B$ b. $A \cap B$

- Expresa por extensión los siguientes conjuntos:

  a. $A = \{x/x$ es un número par $4 < x \leq 10\}$

  b. $B = \{x/x$ es un número impar $3 < x < 10\}$

- Completa los espacios que faltan:

  a. $\frac{1}{3}+\boxed{\frac{\square}{\square}}=1$ b. $1-\boxed{\frac{\square}{\square}}=\frac{2}{5}$

1. PROBABILIDAD *de un* EVENTO

1.1 Experimento aleatorio y experimento determinista

La señora Carmen vende helados en la puerta de la escuela. Un día le propone a Luisito un experimento: lanzar una moneda. La señora le propone que si sale cara le da el helado gratis y, si sale sello, Luisito paga el doble del precio del helado. La señora lanza la moneda al aire.

¿Antes de ver el resultado podremos saber si es cara o sello?
¿Qué será lo más probable: que gane Luisito o la heladera?

La situación planteada es conocida como **experimento aleatorio**, ya que el resultado no se puede conocer de antemano. El hecho de realizar por una sola vez la acción o experimento, no es suficiente para predecir futuros resultados. Sin embargo, si repetimos varias veces el experimento será posible observar algunos patrones que nos permitirán predecir algún resultado.

También existen fenómenos que obedecen a las leyes físicas y se producen de modo previsible. Se les conoce como **experimentos deterministas**. Por ejemplo:

- La caída de los cuerpos.
- La reflexión de la luz.
- La formación de agua a partir de hidrógeno y oxígeno, etc.

1.2 Espacio muestral y evento

José participa en un sorteo de tarjetas para celulares cuyos valores son de S/.30; S/.40; S/.60 y S/.100. En una caja hay solo una tarjeta de cada precio. Si José extrae una tarjeta sin ver, ¿se puede saber qué tarjeta ganó?

Para ello elaboraremos un diagrama, que nos permitirá visualizar mejor todos los posibles resultados.

JOSÉ

S/. 30
S/. 40
S/. 60
S/. 100

Como podrás observar, José puede ganar cualquiera de las tarjetas. Al conjunto formado por todos estos resultados posibles, se le denomina espacio muestral y lo denotamos por "Ω". Entonces $\Omega = \{30; 40; 60; 100\}$.

Supongamos que José saque una tarjeta con un valor menor que S/. 50, entonces los resultados favorables serán {30; 40}, este subconjunto es llamado **Evento o suceso** y es representado por: $E = \{30; 40\}$.

Podemos concluir que lo que sucede en un experimento tal como lanzar una moneda, lanzar un dado, lanzar un dardo o extraer una carta de un mazo, se llama resultado. El conjunto de todos los resultados posibles en un experimento se llama espacio muestral.

Un evento o suceso es un subconjunto del espacio muestral. Así tenemos:

Suceso seguro (Ω): es el suceso que siempre ocurre, se llama también suceso universal.

Suceso imposible (ϕ): es el suceso que nunca ocurre. Se llama también suceso vacío.

Suceso elemental: es un subconjunto del espacio muestral, que tiene un solo elemento.

Suceso compuesto: es un subconjunto del espacio muestral que tienen dos o más elementos.

http://www.uh.edu/engines/cardano.jpg

Girolamo Cardano
(Italia, 1564 - 1642)

Las probabilidades numéricas para ciertas combinaciones de dados ya habían sido calculadas por Girolamo Cardano y por Galileo Galilei. Cardano en su obra *Lanzando los dados*, publicada 87 años después de su muerte, introduce conceptos de combinatorios en cálculos de probabilidad y define la probabilidad como "el número de resultados favorables dividido por el número de posibles resultados".

www.uh.edu/engines/cardano.jpg

1.3 Probabilidad

Algunos sucesos o fenómenos se pueden predecir con certeza mientras que otros no, pero sí se pueden establecer las posibilidades de cada resultado, a partir del estudio de su probabilidad.

Si un evento ***E*** puede suceder de ***m*** maneras entre ***n*** resultados igualmente posibles de un espacio muestral Ω, la probabilidad de dicho evento está dada por ***P(E)***, donde:

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

Cuando los resultados de un experimento tienen la misma probabilidad de suceder, se dice que son igualmente probables.

De la situación presentada anteriormente: **¿Cuál es la probabilidad de que José saque una tarjeta que sea menor a S/. 50?**

Como: $\Omega = \{30; 40; 60; 100\}$ entonces $n = 4$

$E = \{30; 40\}$ entonces $m = 2$

$P(E)$: "probabilidad de que José escoja una tarjeta que sea menor a S/. 50".

$$P(E) = \frac{m}{n} \rightarrow P(E) = \frac{2}{4} \rightarrow P(E) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que José escoja una tarjeta que sea menor de S/.50 es de $\frac{1}{2}$.

1.4 Probabilidad teórica

Si todos los resultados en un espacio muestral Ω son igualmente probables y *E* es un evento del espacio muestral, entonces la **probabilidad teórica** de un evento E está dada por:

$$P(E) = \frac{\text{Números de resultados favorables}}{\text{Números de resultados totales}} \rightarrow P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \rightarrow P(E) = \frac{m}{n}$$

Ejemplo 1

Si una moneda es lanzada al aire, encuentra la probabilidad de que salga cara.

Resolución:

No existe aparentemente razón para que el resultado de una moneda sea más frecuente que el otro. Podríamos normalmente asumir que "cara" o "sello" tienen la misma probabilidad. Esta afirmación puede enfatizarse al decir que la moneda es "justa".

El experimento de lanzar una "moneda justa" tiene un espacio muestral denotado por Ω = {cara, sello} y el evento cuya probabilidad buscamos es *E* = {cara}. Si uno de los dos posibles resultados es cara, la probabilidad de obtener cara es el cociente de 1 y 2.

$$P(\text{"cara"}) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad P(E) = \frac{1}{2}$$

Observación: La probabilidad teórica de los resultados de una moneda justa es ½ ó 0,5

Ejemplo 2

En la I.E. "José María Arguedas" se ha clasificado a 1 000 estudiantes según su edad y sexo. Los datos se muestran en la siguiente tabla de doble entrada:

Edad \ Sexo	Mujeres	Hombres	Total
Menores de 14 años	100	250	350
De 14 a más	200	450	650
Total	300	700	1 000

Calcule la probabilidad de que al elegir aleatoriamente un estudiante éste sea:

a. Hombre
b. Mujer
c. Menor de 14 años
d. De 14 a más años

Resolución:

Antes de calcular estas probabilidades, tenemos que definir cada uno de los sucesos:

A: "El estudiante seleccionado es un hombre".
B: "El estudiante seleccionado es una mujer".
C: "El estudiante seleccionado menor de 14".
D: "El estudiante seleccionado es de 14 años a más".

Una vez definidos los sucesos, la probabilidad de que cada una de ellas ocurra se calcula aplicando la fórmula teórica de probabilidad. Observemos:

a. $P(A) = \frac{700}{1\,000} \rightarrow P(A) = 0,7$

b. $P(B) = \frac{300}{1\,000} \rightarrow P(B) = 0,3$

c. $P(C) = \frac{350}{1\,000} \rightarrow P(C) = 0,35$

d. $P(D) = \frac{650}{1\,000} \rightarrow P(D) = 0,65$

http://www.philothek.de/bildarch/gif/Pascal.jpg

Blaise Pascal
(Francia, 1623 - 1662)

Fue escritor y filósofo, y también un matemático y físico capaz. Entre sus contribuciones está la teoría de la probabilidad, el triángulo de Pascal y el principio de inducción matemática.
A los 12 años Blaise aprendió la Geometría, y demostró la mayor parte de los teoremas elementales. A los 19 años inventó la primera máquina de sumar. En 1647, después de escribir un gran tratado sobre las secciones cónicas, abandonó la Matemática, por su mala salud. Se dedicó a recreaciones frívolas, como las apuestas, pero ellas sirvieron para aguzar su interés en la probabilidad. Sobrevivió milagrosamente a un accidente de carruaje, en 1564, cuando sus caballos se salieron de un puente. Daba más valor a la fe y a la intuición que a la razón, como fuente de la verdad, y declaró que "el corazón tiene sus propias razones, y no conocemos la razón de ello".

www.biografiasyvidas.com

Ejemplo 3

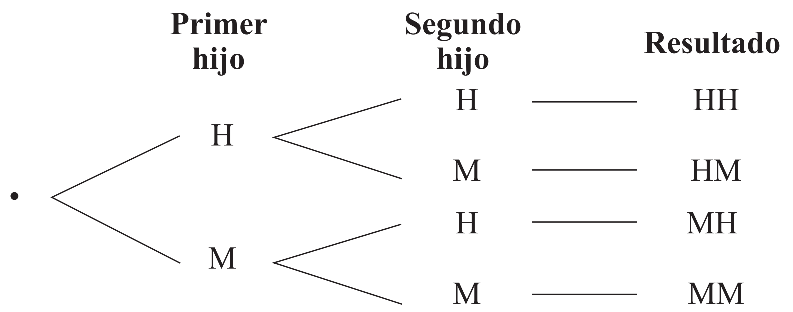
La señora María quiere tener exactamente dos hijas. Asumiendo que un bebé varón o mujer son igualmente probables, encuentra la probabilidad del suceso en cada uno de los siguientes casos:

a. Ella tiene dos niñas en total.
b. Ella tiene tres niños en total.

Resolución:

a. Ella tiene dos niñas en total

Dado que las afirmaciones son de igual probabilidad, aquí usaremos la probabilidad **teórica**. Pero, ¿cómo podemos determinar el número de resultado favorables y el número total de resultados posibles? Usemos un **diagrama de árbol**. Observa:



Donde H = niño y M = niña

Sea A el evento tener exactamente dos hijas de dos hijos, entonces:

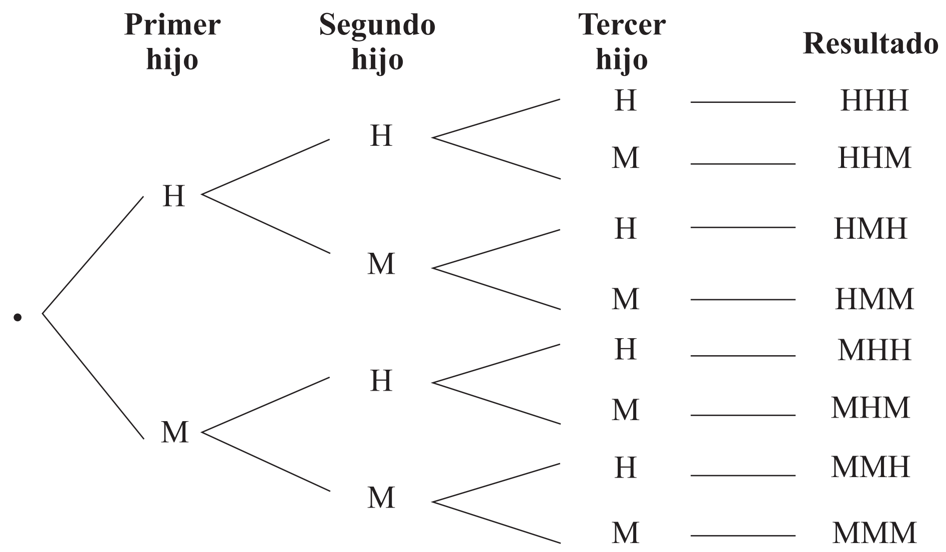
$$E(A)=\{MM\}$$

De la columna de resultados, obtenemos que el espacio muestral es: $\Omega = \{HH, HM, MH, MM\}$. Solamente un resultado nos da un evento de tener dos hijas: $E = \{MM\}$.

Por fórmula teórica de probabilidad tenemos: $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}=\dfrac{1}{4}$

b. Ella tiene tres niños en total.

Para tres hijos en total construimos otro diagrama de árbol:



En este caso, $\Omega = \{HHH, HHM, HMH, HMM, MHH, MHM, MMH, MMM\}$

curiosidades matemáticas

La probabilidad a través de la historia

La historia del estudio de la probabilidad comenzó en el siglo XVII, cuando el caballero De Meré le propuso a Pascal algunos problemas relacionados con el juego de los dados.

Pascal mantenía una intensa correspondencia con otro matemático, Fermat, y entre los dos buscaron la solución de los problemas planteados.

Huygens y Bernoulli también se ocuparon por esa época del estudio matemático de los juegos de azar.

En el siglo XIX, la probabilidad se desarrolló considerablemente y comenzó a aplicarse en Economía, Física, Medicina, etc.

En el siglo XX, Kolmogorov y Schwartz han dado un notable impulso a la teoría de probabilidades.

$$A = \{\text{HMM,MHM,MMH}\}, \ \text{así: } P(A) = \frac{3}{8}$$

Teniendo en cuenta las probabilidades halladas, podemos concluir que la señora María tiene más posibilidad de tener dos niñas cuando tiene tres hijos en total que cuando tiene solo dos hijos.

1.5 Probabilidad empírica

Si E es un evento que puede ocurrir cuando un experimento es realizado, entonces la **probabilidad empírica** del evento E está dada por:

$$P(E) = \frac{\text{Número de veces que el evento E ocurre}}{\text{Número de veces que el experimento fue realizado}}$$

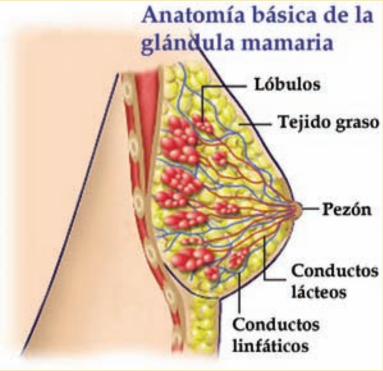
Ejemplo 1

Mañana es el día mundial

INCIDENCIA DE CÁNCER DE MAMA ES IGUAL EN LIMA Y NUEVA YORK

En distritos de ingresos medios y altos de Lima se registran más casos.

Andrea Castillo Calderón



Según demuestra el Registro de Cáncer de Lima, el cáncer de mama ha desplazado del primer lugar de incidencia al cáncer uterino (aún más frecuente en el interior del país). Así, de 2 260 familias que se han registrado en el año 2004 se obtuvo el informe siguiente:

Según el Dr. Raúl Velarde, Jefe del Departamento de Senos y Tumores del Instituto Nacional de Enfermedades Neoplásicas (INEN), lo ideal sería que las madres sean evaluadas como parte del procedimiento clínico en cada visita al ginecólogo.

Entre los principales factores de riesgo figuran los antecedentes familiares y otros, pero estos solo representan aproximadamente el 15% de casos. En el 85% estos factores no existen. “Sin duda el factor genético resulta determinante. De allí que es mejor prevenir antes que lamentar”.

Antecedentes de cáncer	Presenta cáncer	No presenta cáncer	Total
Sí	165	495	660
No	128	1 472	1 600
Total	293	1 967	2 260

***El Comercio*, 4 de octubre de 2006.**

Frente a la noticia de que el cáncer de mama en limeñas sigue incrementándose:

A. Calcula la probabilidad de que una mujer limeña presente cáncer de mama.
Sea A el evento “mujer que presenta cáncer”.
Tenemos:

$$P(A) = \frac{\text{Número de mujeres que presentan cáncer}}{\text{Número total de mujeres}}$$

$$P(A) = \frac{293}{2\ 260} \rightarrow P(A) \approx 0{,}129$$

B. En caso de que existan antecedentes familiares, entonces calcula la probabilidad de que una mujer limeña presente cáncer de mama.

$$P(B) = \frac{\text{Número de mujeres con antecedentes que presentan cáncer de mama}}{\text{Número total de mujeres con antecedentes familiares}}$$

$$P(B) = \frac{165}{660} \rightarrow P(B) \approx 0{,}25$$

Como podrás observar en las probabilidades anteriores, podemos concluir que existe mayor probabilidad de tener cáncer de mama si existen antecedentes familiares, lo que nos lleva a reflexionar acerca de tomar las medidas pertinentes para no lamentarnos después.

Ejemplo 2

En el año 2000, los nacimientos en los Estados Unidos son 2 077 millones de varones y 1 982 millones de mujeres. Si, de los nacimientos de ese año, una persona fue seleccionada al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la persona sea varón?

Resolución:

Así, varones y mujeres no son exactamente de igual probabilidad y tenemos los datos específicos **experimentalmente**.

Sea A el evento “nacer varón”.

$$P(A) = \frac{\text{Número de varones nacidos}}{\text{Número total de nacimientos}} \rightarrow P(A) = \frac{2\ 077}{2\ 077 + 1\ 982} \rightarrow P(A) \approx 0{,}512$$

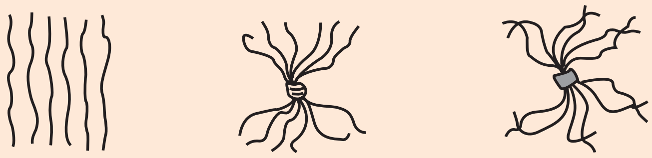
Actividad 1

Interpreta conceptos sobre probabilidad de un evento, y aplícalos en la resolución de situaciones problemáticas, manifestando seguridad.

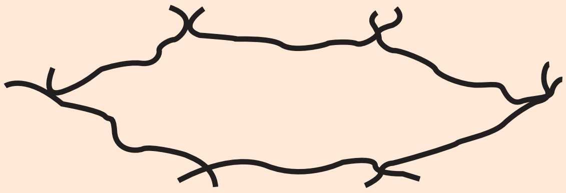
Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios y luego compara tus respuestas con tus compañeros y compañeras, mostrando respeto y tolerancia.

1. La prueba de las cuerdas

Antiguamente, en cierta isla del Pacífico, para poder casarse era precisa la “aprobación de los dioses”. Para obtenerla, la pareja debía superar la “prueba de las cuerdas” en presencia del sacerdote. Este tomaba 6 trozos de cuerda iguales y, juntos, los ataba con un nudo central. Después, cada novio debía anudar de dos en dos los seis cabos de uno de los lados.



Finalmente, el sacerdote deshacía el nudo central y solo si las 6 cuerdas aparecían unidas (formando un ciclo) concedía el permiso para la boda.



a. A primera vista, ¿te parece que superar la prueba es fácil, muy difícil, bastante probable? Intenta adivinar aproximadamente qué porcentaje de parejas superaba la prueba.

b. Para poder asignar un número a la confianza que se puede tener en superar la prueba de las cuerdas, vamos a experimentar reiteradamente. Realiza la prueba con tu compañero o compañera 10 veces, copia la tabla en tu cuaderno y anota los resultados en la tabla. ¿Qué probabilidad le asignarías ahora a recibir el permiso para la boda?

Pareja Nº	Pasó la prueba	No pasó la prueba
1		
2		
...		
15		
Total		

NO ESCRIBIR

c. A la vista de los resultados, ¿parece más probable superar la prueba o fracasar en ella?

2. Escala de probabilidades.
Vamos a realizar una previsión del tiempo para el próximo fin de semana en Lima:

a. Relaciona las dos columnas y construye frases que podrían describir cómo será el fin de semana en Lima.

- Es bastante probable
- Lo más probable es
- Es probable
- Es imposible
- Es muy probable
- Es casi seguro
- Es seguro
- Es difícil
- Es casi imposible
- Hay muchas posibilidades de
- Hay pocas posibilidades de
- Es poco probable

- que llueva
- que nieve
- que el día sea cálido y soleado
- que haga un ligero viento
- que el cielo esté nublado
- que la temperatura oscile entre los 25 y 30 grados
- que la temperatura máxima sobrepase los 30º

b. Ordena las frases que has construido según la confianza que tienes de que ocurran (empezando por lo más probable). Compara tu lista con las de otros compañeros y compañeras.

c. Cada una de las frases anteriores representan sucesos. Cuanto mayor sea la confianza que tengas de que ocurra, mayor será el número. El 0 sería el valor correspondiente a la palabra “imposible”, el 1 a “seguro” y 0,5 correspondería a “es tan probable que ocurra como que no ocurra”. Asígnale a cada una de estas frases uno de estos valores.

3. Mensaje a todas las mujeres

Teniendo en cuenta el análisis del artículo **“Incidencia del cáncer de mama”**, redacta un mensaje dirigido a todas las mujeres y preséntalo a tu profesor.

en grupo...

investiga *con tus compañeros*

Laplace

Algunas personas han tenido y siguen teniendo un rol preponderante en el desarrollo de las ciencias. Investiga los aportes realizados por Laplace en la Teoría de Probabilidades.

Para esto forma un equipo de cuatro integrantes con tus compañeros de aula. Visiten la biblioteca del colegio e investiguen en diversos textos sobre este tema. Presenten un informe sobre lo investigado.

2. PROPIEDADES *de la* PROBABILIDAD

2.1 Ley de los Grandes Números

Cuando un experimento es repetido más y más veces, la proporción de los resultados favorables de un evento particular tiende a acercarse a la probabilidad teórica del evento, de modo que se cumple lo que se denomina la **Ley de los Grandes Números**.

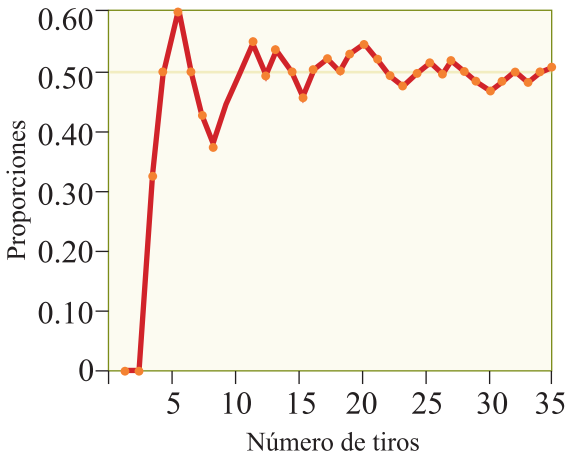
Supongamos que una "moneda justa" se tira 35 veces, produciendo la siguiente secuencia de resultados:

S S C C C S S S C C C S C S S C C S C C
S S S C C S C S S S C C S C C

Calculamos la proporción de caras de total de tiros después del primer tiro, segundo tiro, y así en todos los 35 tiros tenemos:

# TIROS	PROPORCIÓN	# TIROS	PROPORCIÓN	# TIROS	PROPORCIÓN
1	$\frac{0}{1}=0{,}000$	13	$\frac{7}{13}=0{,}538$	25	$\frac{13}{25}=0{,}520$
2	$\frac{0}{2}=0{,}000$	14	$\frac{7}{14}=0{,}500$	26	$\frac{13}{26}=0{,}500$
3	$\frac{1}{3}=0{,}333$	15	$\frac{7}{15}=0{,}466$	27	$\frac{14}{27}=0{,}518$
4	$\frac{2}{4}=0{,}500$	16	$\frac{8}{16}=0{,}500$	28	$\frac{14}{28}=0{,}500$
5	$\frac{3}{5}=0{,}600$	17	$\frac{9}{17}=0{,}529$	29	$\frac{14}{29}=0{,}482$
6	$\frac{3}{6}=0{,}500$	18	$\frac{9}{18}=0{,}500$	30	$\frac{14}{30}=0{,}466$
7	$\frac{3}{7}=0{,}428$	19	$\frac{10}{19}=0{,}526$	31	$\frac{15}{31}=0{,}483$
8	$\frac{3}{8}=0{,}375$	20	$\frac{11}{20}=0{,}550$	32	$\frac{16}{32}=0{,}500$
9	$\frac{4}{9}=0{,}444$	21	$\frac{11}{21}=0{,}523$	33	$\frac{16}{33}=0{,}484$
10	$\frac{5}{10}=0{,}500$	22	$\frac{11}{22}=0{,}500$	34	$\frac{17}{34}=0{,}500$
11	$\frac{6}{11}=0{,}545$	23	$\frac{11}{23}=0{,}478$	35	$\frac{18}{35}=0{,}514$
12	$\frac{6}{12}=0{,}500$	24	$\frac{12}{24}=0{,}500$		

El siguiente gráfico muestra las fluctuaciones alrededor de 0,50 cuando el número de lanzamientos crece, y la proporción se aproxima a 0,50 como se muestra en el gráfico con la ley de los grandes números.



Se puede observar que esta situación prueba una importante conexión entre la **probabilidad empírica** y la **probabilidad teórica**, ya que así se obtiene, por experimentación, una **probabilidad empírica** para un evento y, en consecuencia, por razonamiento inductivo, se estima la **probabilidad teórica del evento. A más repeticiones, la estimación se aproxima más a la realidad.**

2.2 Propiedades de la probabilidad

Si E es un evento de un espacio muestral Ω. Esto es, E es un subconjunto de S.

Entonces tenemos las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(E) \leq 1$ (La probabilidad de un evento es un número de 0 a 1 inclusive). Esto ocurre para todo evento E.

2. $P(\phi) = 0$ (La probabilidad de un evento imposible es 0).

3. $P(\Omega) = 1$ (La probabilidad de un evento seguro es 1).

Si todo evento E es un subconjunto del espacio muestral S, entonces, conocemos que $0 \leq n(E) \leq n(S)$. Dividiendo todos los miembros de esta igualdad por $n(S)$ tenemos:

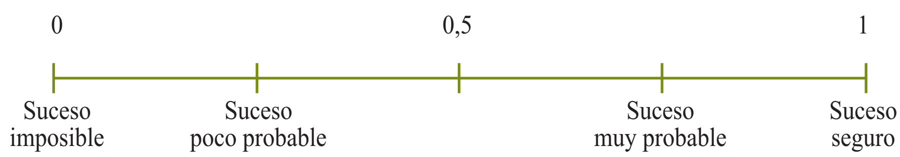
$$\frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(E)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \quad \text{ó} \quad 0 \leq P(E) \leq 1$$

Es decir, la probabilidad de un evento es un número de 0 a 1 inclusive.

– Si el evento E es **imposible** (no puede ocurrir), entonces, $n(E)$ debe ser 0 (E es el conjunto vacío), así: $P(E) = 0$

– Si el evento E es **seguro** (ocurre) entonces, $n(\Omega) = n(E)$, así:
$$P(E) = n(E) / n(\Omega) = n(E) / n(E) = 1$$

2.3 Escala de probabilidad



Un mate... de risa

"Estoy pensando"

HERNÁNDEZ, C. (1999). Orceman. IDEAL. Granada

ϕ representa al suceso imposible

Ω representa al suceso seguro

Definición de Tsunami

De origen japonés, su significado es “ola gigante que llega al puerto”. En realidad no se trata de una ola, sino de una serie de ellas que se producen en una masa de agua, la cual es empujada con violencia por una fuerza con desplazamiento vertical.
Técnicamente es un disturbio producido en el mar por un fenómeno que impulsa y desplaza verticalmente una columna de agua produciendo un desequilibrio de niveles que se manifestará en un tren de ondas largas propagadas a mucha velocidad, que al llegar a costas de islas o continentales confieren una tremenda devastación, introduciéndose muchos metros, incluso kilómetros, dentro del territorio. Aunque muchos hayan confundido los tsunamis con los maremotos (movimientos sísmicos en el lecho marino) no es el único fenómeno externo que puede producirlos (aunque sean causa del 96 % de los casos). Otras causas son las erupciones volcánicas, los desplazamientos de lava hacia el mar, el choque de meteoritos contra las aguas, derrumbes costeros, desprendimientos glaciarios e incluso explosiones de gran magnitud (pruebas nucleares).

http://www.abcpedia.com/fenomenos-naturales/tsunami-sunami.htm

Vista panorámica del río Amazonas.

A continuación, daremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Informe Hidrométrico del SENAMHI.

HIDROLOGÍA:

Las lluvias que están presentándose en la selva central y norte son dispersas e irregulares, por lo que sus aportes no son significativos para el incremento en los niveles de los ríos de la cuenca amazónica, pues sabemos que los niveles normales del río Amazonas en estas temporadas han sido aproximadamente de 109.00 m.s.n.m.

VARIACIÓN DE LOS NIVELES DEL RÍO AMAZONAS (SETIEMBRE)

Estación: H-ENAPU PERU

Setiembre (días)	Nivel del agua (m.s.n.m.)	Octubre (días)	Nivel de agua (m.s.n.m.)
1	107,00	3	106,01
6	106,90	7	106,50
8	107,49	11	106,20
13	107,80	15	107,10
17	107,90	19	106,70
21	107,40	23	106,80
25	106,50	27	107,00
29	106,00	30	106,10

Observamos que a simple vista el nivel del río Amazonas está presentando un comportamiento hidrológico descendiente durante los meses de septiembre y octubre; esto significa que el fenómeno va a seguir ocurriendo, ya que las 16 observaciones han demostrado niveles por debajo de los normales, situación que nos lleva a reflexionar acerca de cuáles serán las causas que provocarán dicho fenómeno y qué actitud debemos asumir frente a ella.

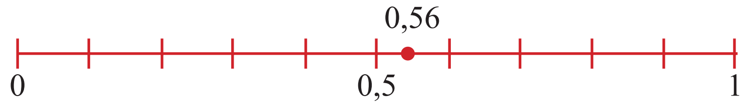
Pero si nos preguntamos cuál es la probabilidad de ocurrencia de que el río Amazonas suba a niveles normales, teniendo en cuenta las 16 observaciones, definitivamente es imposible que eso ocurra ya que en el reporte no existe dicha situación.

Considerando el informe hidrométrico del SENAMHI, responde:

a. ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de que el río Amazonas baje a niveles menores a 107,00 m.s.n.m.?
   Lo primero que debemos hacer es determinar la probabilidad de dicho evento donde:
   - El número total de observaciones experimentadas es $n(\Omega) = 16$
   - El número de sucesos favorables de que el río Amazonas baje a niveles menores de 107,00 m.s.n.m. es $n\ (E) = 9$.
   - La probabilidad de que el nivel del río Amazonas baje a niveles menores de 107,00 m.s.n.m. está dada por:

$$P(E) = \frac{n(\Omega)}{n(E)} \quad \rightarrow \quad P(E) = \frac{9}{16} \quad \rightarrow \quad P(E) \approx 0,56$$

– Graficaremos para determinar la probabilidad de que el evento ocurra:



– Por lo tanto, es probable que el nivel del río Amazonas baje a niveles menores de 107,00 m.s.n.m.

b. ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de que el nivel del río Amazonas sea mayor a 107,00 m.s.n.m.?

Se sabe: $n\,(\Omega) = 16$; $n(E) = 5$

Por lo tanto: $P(E) = \dfrac{5}{16} \rightarrow P(E) \approx 0{,}31$

– Graficaremos para determinar la probabilidad de que el evento ocurra:

– Por lo tanto, no es muy probable que el nivel del río Amazonas sea mayor a 107,00 m.s.n.m.

Ejemplo 2

Se lanza un dado y se observa los puntos que se obtienen. Determina la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes:

a. Obtener 2 puntos

b. Que salga un número diferente de 2

c. Que salga el número 7

d. Que salga un número menor que 7

Resolución:

a. Sea A en evento “número 2”, $A = \{2\}$ y $n(A) = 1$
Solo una de las seis posibilidades es un 2.

Entonces: $P\,(A) = \dfrac{1}{6}$

b. Que salga un número diferente de 2.
Sea B el evento “número diferente de 2”, $B = \{1; 3; 4; 5; 6\}$ y $n(B) = 5$

Entonces: $P(A) = \dfrac{5}{6}$

c. Que salga el número 7.
Sea C el evento “número 7”, como el número 7 no existe en el dado, C es vacío, entonces: $n(C) = 0$, $n(D) = 6$

De allí: $P(C) = \dfrac{0}{6} \rightarrow P(D) = 0$

d. Que salga un número menor que 7.
Sea E el evento “número menor que 7”, $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ y $n\,(E) = 6$

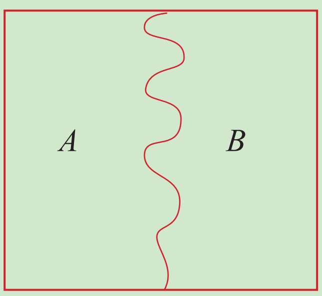
Entonces: $P(E) = \dfrac{6}{6} \rightarrow P(E) = 1$

curiosidades matemáticas

LA LEYENDA DE DANTZIG

Imagina la siguiente situación: Un día llegas a clase algo tarde.Te sientas, y al mirar a la pizarra ves un par de ecuaciones escritas en ella. Como es normal supones que es trabajo mandado por el profesor y las apuntas para trabajar en ellas al acabar las clases. Llegas a casa y trabajas la tarea. Notas que la dificultad de los ejercicios propuestos es algo mayor de lo habitual, pero eso no te echa para atrás y después de unos días consigues terminar el trabajo. Al día siguiente de acabarlo se lo entregas al profesor. Días después recibes una llamada del mismo en la que te dice: ¿te das cuenta de lo que has hecho con tu trabajo? Respondes: vaya, realicé mal la tarea, ¿verdad?. Y el profesor te dice: nada de eso. Has resuelto dos ecuaciones de las que todavía no se conocía la solución.

http://www.gaussianos.com/category/matematicos/



A y *B* son eventos complementarios
$P(A) + P(B) = 1$

2.4 Regla del complemento de probabilidad

Si consideramos que José y María tienen que sacar 1 de 4 tarjetas telefónicas de S/.30, S/.40, S/.60 y S/.100 cada uno. Sabemos que solo hay una tarjeta de cada tipo y, por lo tanto, no pueden sacar tarjetas iguales, averigua:

a. ¿De cuántas maneras pueden sacar las tarjetas?

Esto significa que debemos determinar el espacio muestral. Nos ayudamos del siguiente diagrama:

José → 30
María → 40, 60, 100

José → 40
María → 30, 60, 100

José → 60
María → 30, 40, 100

José → 100
María → 30, 40, 60

Donde:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix}(30;40),\ (30;60),\ (30;100),\ (40,30),\ (40;60),\ (40,100)\\ (60;30),(60;40),\ (60;100),\ (100;30),(100;40),(100;60)\end{matrix}\right\} \rightarrow n(\Omega)=12$$

Por lo tanto, hay 12 maneras diferentes de sacar las tarjetas.

b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar tarjetas con valores mayores a S/. 50?
Sea A: "Sacar tarjetas con valores mayores a S/. 50", $A = \{(60;100)(100;60)\}$ $y\ \ n(A) = 2$

Por lo tanto: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)} \rightarrow P(A)=\dfrac{2}{12} \rightarrow P(A)=\dfrac{1}{6}$

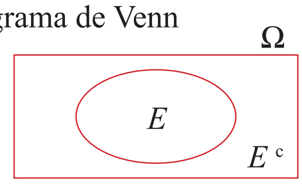
c. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de ellos saque una de las tarjetas con valores menores a S/. 50?
Sea B: "Sacar tarjetas con valores menores a S/.50"

$$B = \left\{\begin{matrix}(30;40),(30;60),(30;100),(40;30),(40;60)\\ (40;100),(60;30),(60;40),(100;30),(100;40)\end{matrix}\right\} y\ \ n(B)=10$$

Por lo tanto: $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)} \rightarrow P(B)=\dfrac{10}{12} \rightarrow P(B)=\dfrac{5}{6}$

De b y c observamos que: $P(A) + P(B) = 1$

Consideremos el diagrama de Venn



Del diagrama $\Omega = E \cup E^C$

Tomando probabilidad a ambos miembros:

$P(\Omega) = P(E \cup E^C)$

$P(\Omega) = P(E) + P(E^C)$; $E \cap E^C = \phi$

Pero: $P(\Omega) = 1$

Luego: $1 = P(E) + P(E^C)$

En conclusión: La probabilidad de un evento y la probabilidades de su complemento suman 1.

De allí: $P(E^C) = 1 – P(E)$

Ejemplo:

Se retira una carta de un "mazo justo" de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una carta diferente de un "rey"?

Resolución:

Es más fácil contar los "reyes" que los "no reyes". Sea E el evento de no retirar un "rey", entonces:

$$P(E)=1-P\left(E^{C}\right) \rightarrow P(E)=1-\frac{n\left(E^{C}\right)}{n(s)}$$

$$P(E)=1-\frac{4}{52} \rightarrow P(E)=\frac{48}{52} \rightarrow P(E)=\frac{12}{13}$$

La probabilidad de retirar cartas diferentes de un "rey" es de $\frac{12}{13}$.

Actividad 2

Interpreta y calcula correctamente la probabilidad de un evento a través de diferentes estrategias, manifestando orden y perseverancia.

Forma un equipo de cinco integrantes. Distribuye las actividades y, trabajando con responsabilidad, elaboren un informe, detallando los procedimientos empleados en la solución de cada situación planteada.

Control de calidad

La empresa SILENCIOSOS S.A. se dedica a la fabricación de tubos de escape para automóviles. Por los controles de calidad que la misma empresa lleva a cabo, se puede concluir diciendo que aproximadamente el 5% de los tubos de escape producidos son defectuosos. En el laboratorio de control de calidad hay instalado un dispositivo que detecta el 90% de los tubos incorrectos, pero también califica como defectuosos el 2% de los correctos. El gerente de la empresa está interesado en conocer las probabilidades de los siguientes eventos:

A: Que sea correcto un tubo calificado como defectuoso por el dispositivo.

B: Que sea defectuoso un tubo calificado por el dispositivo como correcto.

a. Determina las probabilidades de los eventos A y B.

b. Teniendo en cuenta los datos anteriores, completa la siguiente tabla, en la que se recoge la distribución esperada para 10 000 tubos fabricados por SILENCIOSOS S.A.:

	Tubos calificados como defectuosos (C)	Tubos calificados como no defectuosos (C^{C})	Total
Tubos defectuosos (D)			
Tubos no defectuosos (D^{C})			
Total			10 000

c. A la vista de los datos de la tabla, calcula la probabilidad de los sucesos siguientes:

D : que un tubo sea defectuoso.
D^{C} : que un tubo no sea defectuoso.
C : que un tubo sea calificado como defectuoso.
C^{C}: que un tubo sea calificado como no defectuoso.
$D \cap C$: que un tubo sea defectuoso y sea calificado como defectuoso.
$D^{C} \cap C$: que un tubo no sea defectuoso y sea calificado como defectuoso.
$D \cap C^{C}$: que un tubo sea defectuoso y sea calificado como no defectuoso.

d. ¿Qué representará $P(D^{C}/C)$? Calcula su valor y exprésalo como un porcentaje.
¿Encuentras alguna relación entre el valor de $P(D^{C}/C)$ y las probabilidades calculadas en el apartado c.?

e. Calcula $P(D/C)$ y $P(D/C^{C})$. ¿Cuál de estas probabilidades dará respuesta a una de las cuestiones formuladas por el gerente? ¿Sabrías ponerla en función de algunas de las probabilidades calculadas en el apartado c.?

en grupo...

investiga *con tus compañeros*

Investiga el número total de boletos o combinaciones que tiene la "TINKA". Luego halla la probabilidad que tiene una persona de ganar el premio mayor si:

a. Compra un boleto
b. Compra 100 boletos
c. ¿Cuántos boletos crees que debe comprar para que su opción de ganar sea "muy probable"? ¿Será posible realizar esta compra? ¿Por qué?

Presenta un informe escrito y compara tus respuestas con las de tus compañeros.

3. PROBABILIDAD *de la* UNIÓN DE EVENTOS

3.1 Regla general de la probabilidad de la unión de eventos

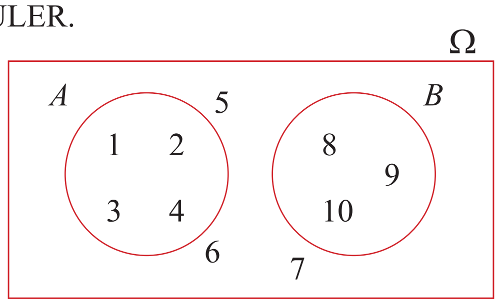
Ejemplo

Analicemos la siguiente situación:
En un hotel hay diez habitaciones numeradas del 1 al 10.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una habitación elegida al azar tenga una numeración menor que 5 ó mayor que 7?

Resolución:

Definiremos el espacio muestral: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
y definiremos los eventos:
A: Los números menores que 5, $A = \{1; 2; 3; 4\}$
B: Los números mayores que 7, $B = \{8; 9; 10\}$
Visualizaremos el espacio muestral y los eventos A y B en un DIAGRAMA DE VENN - EULER.



Observamos que la numeración pedida está en el conjunto unión:
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 8; 9; 10\}$
Luego, la probabilidad de elegir una habitación con esa numeración es:

$$P(A \cup B) = \frac{7}{10}$$

Sabemos que el número de elementos de $A \cup B$ es igual al número de elementos de A más el número de elementos de B, por tratarse de conjuntos disjuntos, es decir, que no tienen elementos comunes.

A estos eventos que no tienen sucesos elementales comunes, los llamamos **eventos mutuamente excluyentes.** Viendo el diagrama, podemos calcular también la probabilidad de A y la probabilidad de B.

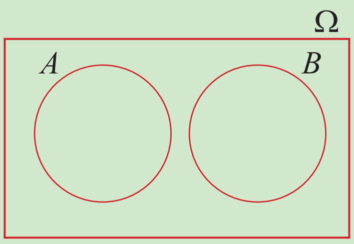
Así, $P(A) = \frac{4}{10}$, $P(B) = \frac{3}{10}$

Como $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$, es claro que

$\frac{7}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10}$, o bien

Recuerda

La conexión lógica "o" corresponde a la **"unión"** en la teoría de conjuntos.



$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

A y *B* son mutuamente excluyentes

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

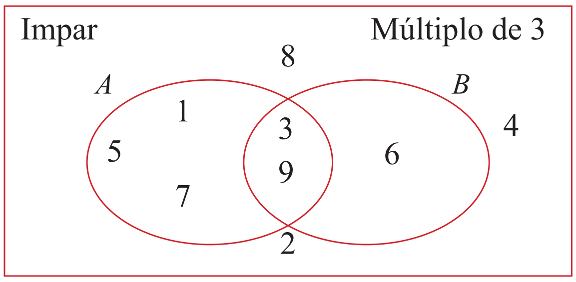
Esta es la fórmula para determinar la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea impar o múltiplo de 3?

Resolución:

Definiremos el espacio muestral: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
y definiremos los eventos:
A: los números son impares; $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$
B: los números múltiplos de 3: $B = \{3; 6; 9\}$

Para visualizar mejor mostraremos la posición de los 10 enteros en el espacio muestral, utilizando el DIAGRAMA DE VENN-EULER.



Donde:

$A \cup B = \{1; 3; 5; 6; 7; 9\}$

Luego, $P(A \cup B) = \dfrac{6}{10}$

Observamos que los eventos A y B tienen elementos comunes, por lo que los dos eventos ***no son mutuamente excluyentes***.

Sabemos que el número de elementos de $A \cup B$ es igual al número de elementos de A más el número de elementos de B menos el número de elementos de $A \cap B$, por tener elementos comunes, es decir, por no ser conjuntos disjuntos.

Viendo el diagrama, podemos calcular también la probabilidad de A, la probabilidad de B y la probabilidad de $A \cap B$.
Así:

$$P(A) = \frac{5}{10}$$

$$P(B) = \frac{3}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{10}$$

Como, $P(A \cup B) = \dfrac{3}{5}$, y análogamente al cálculo del número de elementos de la unión de los dos conjuntos A y B, tenemos, $\dfrac{6}{10} = \dfrac{5}{10} + \dfrac{3}{10} - \dfrac{2}{10}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Esta es la fórmula para determinar la probabilidad de puentes que no son mutuamente excluyentes.

Recuerda

En general, no podemos adicionar las probabilidades individuales para una composición de eventos de la forma A o B.
Haciéndolo para la pregunta b tendríamos:

$$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Podemos verificar que es **¡incorrecto!**

$n(A \cup B)$
$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

http://probability.infarom.ro/kolmogorov.jpg

Andrei N. Kolmogórov

(Rusia, 1903 - 1987)

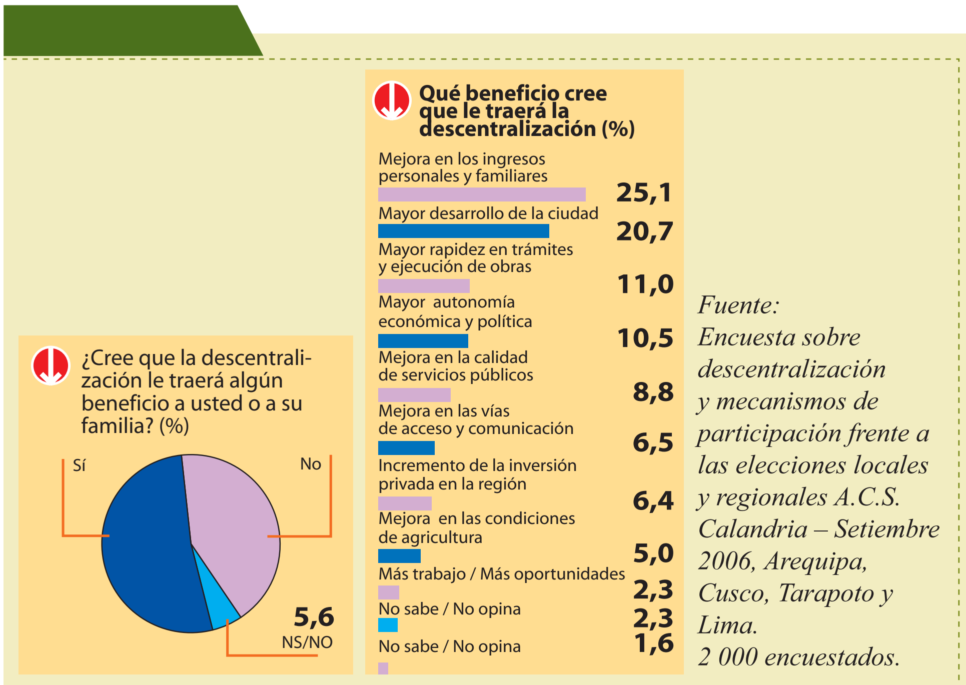
Matemático soviético, se doctoró en la Universidad de Moscú. Sus primeros trabajos versaron sobre la teoría de funciones reales, y, posteriormente, sobre la teoría de la media. Pero sus aportaciones más importantes están referidas a la teoría de probabilidades, para la que desarrolló unas bases axiomáticas apoyadas en las propiedades de las frecuencias relativas de los sucesos.

probability.infarom.ro/kolmogorov.

Ejemplo 2

DESCENTRALIZACIÓN

Opinión de los pobladores de Arequipa, Cusco, Lima y San Martín, sobre la descentralización.



Perú 21, 20 de octubre de 2006.

Teniendo en cuenta este extracto periodístico, si elegimos un poblador de Arequipa, Cusco, Lima o San Martín, determina la probabilidad de que opine que:

a. La descentralización mejora la calidad de servicios públicos.
b. La descentralización mejora el mayor desarrollo de la ciudad.
c. La descentralización mejora la calidad de servicios públicos o la descentralización mejora el mayor desarrollo de la ciudad.
d. Califica la probabilidad del apartado c.

Resolución:

a. Sea E_1: el número de eventos favorables de que los pobladores piensen que la descentralización mejora en la calidad de servicios públicos, luego:

$$n(E_1) = \frac{8,8}{100} \times 2\,000 \quad \rightarrow \quad n(E_1) = 176$$

Si $P(E_1)$ es la probabilidad de que los pobladores piensen que la descentralización mejora en la calidad de servicios públicos, tenemos:

$$P(E_1) = \frac{176}{2\,000} \quad \rightarrow \quad P(E_1) = 0,088$$

La probabilidad $P(E_1) = 0,088$ se puede expresar en forma de porcentajes, así $= 0,088 \times 100/100 = 8,8/100 = 8,8\%$. Por lo que podemos afirmar también que el 8,8% de la población piensa que la descentralización mejora en la calidad de servicios públicos.

b. Sea E_2: el número de eventos favorables de que los pobladores piensen que la descentralización mejora el mayor desarrollo de la ciudad, de allí:

$$n(E_2) = \frac{20,7}{100} \times 2000 \rightarrow n(E_2) = 414$$

Entonces: $P(E_2)$ es la probabilidad de que los pobladores piensen que la descentralización mejora el mayor desarrollo de la ciudad, entonces:

$$P(E_2) = \frac{414}{2000} \quad \rightarrow \quad P(E_2) = 0,207$$

Podemos afirmar que el 20,7% de los pobladores piensa que la descentralización mejora el mayor desarrollo de la ciudad.

c. Los encuestados solo tenían que responder una sola opción.
La probabilidad de que suceda: $P\ (E_1 \text{ o } E_2)$ está dada por:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) \ + \ P(E_2)$$
$$P(E_1 \cup E_2) = 0,088 \ + \ 0,207$$
$$P(E_1 \cup E_2) = 0,295$$

Por lo tanto, se puede afirmar que el 29,5% de los encuestados piensa que la descentralización mejora los servicios públicos.
Ubicamos la probabilidad de $P\ (\ E_1 \text{ o } E_2\ )$ en la siguiente escala:

Evento poco probable

Por lo tanto, el evento es poco probable.

Ejemplo 3

Sara piensa que puede terminar su tarea en una hora determinada de la noche. En efecto, si x representa el número de horas que dedica a su tarea, entonces se muestra la asignación de probabilidad a varios valores de x se puede mostrar en la siguiente tabla de medida:

X	1	2	3	4	5	6
P(x)	0,05	0,10	0,20	0,40	0,10	0,15

Asumimos que el tiempo requerido será redondeado a la hora más cercana que no es menos que una hora ni más que 6 horas. Los seis periodos de tiempo son todos mutuamente excluyentes uno del otro. Por ejemplo, si ella toma 3 horas, entonces no toma 2 horas ó 4 horas en cualquiera de los casos. Encuentra la probabilidad de que Sara termine en cada uno de los siguientes periodos de tiempo:

a. Menos de 3 horas
b. Más de 2 horas
c. Más de 1, pero no más de 5 horas
d. Al menos 5 horas

Resolución:

a. Menos de 3 horas, significa: 1 ó 2, así tenemos:

$$P(\text{"menos de 3 horas"}) = P\,(1 \text{ ó } 2) = P\,(1) + P\,(2) = 0,05 + 0,10 = 0,15$$

La probabilidad que Sara termine en menos de 3 horas es de 0,15

b. Más de 2 horas significa: 3 ó 4 ó 5 ó 6, así tenemos:

$$P(\text{"más de 2 horas"}) = P\ (3 \text{ ó } 4 \text{ ó } 5 \text{ ó } 6) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$
$$P(\text{"más de 2 horas"}) = 0{,}20 + 0{,}40 + 0{,}10 + 0{,}15$$
$$P(\text{"más de 2 horas"}) = 0{,}85$$

La probabilidad de que Sara termine en más de 2 horas es de 0,85

c. Más de 1, pero no más de 5 horas, significa: 2 ó 3 ó 4 ó 5, así:

$$P(\text{más de 1 pero no más de 5 horas}) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$
$$P(\text{más de 1 pero no más de 5 horas}) = 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}40 + 0{,}10$$
$$P(\text{más de 1 pero no más de 5 horas}) = 0{,}80$$

La probabilidad de que Sara termine en más de 1, pero no más de 5 horas es de 0,80.

d. Al menos 5 horas significa probabilidad de 5 ó 6; es decir:

$$P(5 \text{ ó } 6) = P(5) + P(6)$$
$$= 0{,}10 + 0{,}15$$
$$= 0{,}25$$

La probabilidad de que Sara termine en al menos 5 horas es de 0,25.

ATENCIÓN:
P (al menos 5 horas) también se puede calcular de la siguiente manera:
P ("al menos 5 horas")
$= 1 - P(\text{"menos de 5 horas"})$
$= 1 - [P(1) + P(2) + P(3) + P(4)]$
$= 1 - (0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}40)$
$= 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

Actividad 3

Analiza situaciones problemáticas que involucran la probabilidad de la unión de eventos, aplicando las reglas pertinentes.

Resuelve las siguientes situaciones, con orden y responsabilidad.

1. Sucesos contrarios. Escribe los sucesos contrarios a estos:
   a. Que salga número par al lanzar un dado.
   b. Sacar figuras al extraer una carta de una baraja.
   c. Que salgan dos caras al lanzar dos monedas.
   d. Sacar dos números que sumen más de 7 al lanzar dos dados.
2. Lee el recorte periodístico "Descentralización (p. 20), y responde a las siguientes preguntas:
   a. De las 3 probabilidades halladas, ¿cuál tendría mayor posibilidad de ocurrencia? ¿A qué crees que se debe? ¿Por qué crees que piensan así estos pobladores?
   b. ¿Qué opinión te merece el proceso de descentralización?
   c. Del diagrama circular, ¿qué porcentaje de personas piensa que no le traerá beneficio? ¿Por qué crees?
   d. Averigua las bondades de la descentralización.
3. El 60% de la población de una ciudad lee el periódico A, el 40% lee el B y el 15% lee los dos. Calcula el porcentaje de habitantes que no lee ninguno de los dos periódicos.
4. La probabilidad de que el Sr. Sánchez invierta en acciones comunes A es 0,20, en acciones comunes B es 0,30; y en ambas acciones es 0,10; ¿cuál es la probabilidad de que no invierta ni en A ni en B?
5. Las probabilidades de que un vendedor de automóviles venda en una semana cero, uno, dos, tres, cuatro y cinco o más automóviles son 0,05; 0,10; 0,18; 0,25; 0,20 y 0,22 respectivamente.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que venda tres o más automóviles en una semana?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que venda tres o menos automóviles en una semana?

en grupo...
investiga *con tus compañeros*

En equipo, visita las grandes tiendas comerciales de tu localidad y averigua lo siguiente:

a. La probabilidad de que vendan 8 televisores en un mes.
b. La probabilidad de que vendan 10 equipos de sonido en un mes.
c. La probabilidad de que vendan 8 ó 10 artefactos de los mencionados en un mes.

4. PROBABILIDAD *de la* INTERSECCIÓN *de* EVENTOS

4.1 Probabilidad condicional

Como hemos observado, la probabilidad de (*A* o *B*) implica la adición de la probabilidad del evento A y evento B, a la cual se le sustrae la probabilidad del evento (*A* y *B*). La sustracción solo es necesaria cuando *A* y *B* no son mutuamente excluyentes.

Ahora veamos cómo se puede determinar la probabilidad de un evento (*A* y *B*) de manera general.

Si un número es seleccionado aleatoriamente del conjunto:
$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, encuentra la probabilidad de ser impar y múltiplo de 3.

Tenemos:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$; $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$; $B = \{3; 6; 9\}$

La composición del evento *A* y *B* corresponde al conjunto $A \cap B = \{3; 9\}$.
Así, por la fórmula teórica de probabilidad:

$$P(A \text{ y } B) = \frac{2}{10} \quad \rightarrow \quad P(A \text{ y } B) = \frac{1}{5}$$

La fórmula general para la probabilidad del evento A y B requiere de la multiplicación de las probabilidades individuales del evento A y evento B, pero el ejemplo 1 nos muestra que esto debe hacerse cuidadosamente.

El procedimiento es calcular la probabilidad del segundo evento sobre la afirmación de que el primer evento ya ocurrió.

Este tipo de probabilidad calculada donde se asume alguna condición especial, es llamada **probabilidad condicional**.

La probabilidad del evento B, calculado sobre la afirmación de que el evento *A* ocurrió, es llamada la **probabilidad condicional de *B*, dado *A*** y denotado: $P(B/A)$
La selección de un número impar significa que consideremos el conjunto: $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, de estos 5 elementos, solo dos números son múltiplos de 3, $B = \{3; 6; 9\}$, así, usando la probabilidad condicional como segundo factor tenemos:

importante

La probabilidad de una intersección de eventos no siempre es un producto simple.

Ejemplo:

$$P(A) = \frac{5}{10},\ P(B) = \frac{3}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{15}{100}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{20}$$

http://www.indiana.edu/~deanfac/patten/persi.jpg

Persi Diaconis

Nació en Nueva York en 1945, y en la actualidad es profesor de Estadística en la Universidad de Stanford, California. Como provenía de una familia de músicos, estudió violín hasta los 14 años. A esa edad dejó su casa y se hizo mago (aprendiz y maestro) durante 10 años. Todavía la magia es su gran amor, y si hubiera algún grado profesional de magia, con seguridad calificaría. Su interés en los trucos con las cartas lo condujo a estudiar las probabilidades y la Estadística. Hoy es uno de los principales estadísticos del mundo. Con estos antecedentes se acerca a las matemáticas con innegable elegancia. Dice: "La estadística es la física de los números. Parece que los números surgen al mundo en una forma ordenada. Cuando examinamos el mundo, aparecen una y otra vez las mismas regularidades". Entre sus abundantes contribuciones a la Matemática, se encuentra un estudio probabilístico sobre cómo barajar perfectamente las cartas.

www.indiana.edu

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B/A)$$

$$P(A \text{ y } B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{5}$$

$$P(A \text{ y } B) = \frac{1}{5}$$

Se puede verificar que este resultado es ¡correcto!

4.2 Regla general de multiplicación de probabilidad

Dada una familia con dos niños, resuelve lo siguiente:

a. Si conocemos que al menos alguno de los niños es una mujer, encuentra la probabilidad de que ambos sean mujeres (asumimos que varones y mujeres son igualmente probables).

b. Si el mayor de los niños es mujer, encuentra la probabilidad de que ambos niños sean mujeres.

Resolución:

a. El espacio muestral para dos niños puede ser representado como: $\Omega = \{MM, MV, VM, VV\}$. En este caso, la condición dada es que al menos uno de los niños debe ser mujer, así la probabilidad VV queda fuera. El espacio muestral es reducido a $E = \{MM, MV, VM\}$.
El evento "ambos son mujeres" es satisfecho por uno de los tres igualmente probables. Así:

$$P(\text{ambos son mujeres / al menos 1 es mujer}) = \frac{1}{3}$$

b. Si la mayor es mujer, el espacio muestral se reduce a $\{MM, VM\}$, el evento "ambos son mujeres" es satisfecho solamente por uno de los dos elementos del espacio muestral que queda reducido así:

$$P\ (\text{ambos son mujeres / la mayor es mujer}) = \frac{1}{2}$$

Usando una probabilidad condicional, podemos escribir la siguiente **regla general de multiplicación de probabilidad**:
Si A y B son dos eventos, entonces:

$$\boxed{P\,(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)} \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$$

Ejemplo 1

Cada año, Diana añade a su colección de libros un número de nuevas publicaciones. Ella cree que estas tendrán un valor interesante y duradero. Tiene que categorizar cada uno de sus 20 libros adquiridos en el año 2006, clasificados como pasta dura o rústico, y como de ficción o no ficción. El número de libros en las varias categorías son mostrados en la siguiente tabla:

Libros del año 2006			
	Ficción (F)	No ficción (N)	Totales
Pasta dura (D)	3	5	8
Rústica (R)	8	4	12
Totales	11	9	20

Si Diana escoge aleatoriamente uno de estos 20 libros para leer por la noche, determina la probabilidad de cada uno de estos eventos:

a. Escoger un libro de pasta dura.
b. Escoger un libro de ficción, dado que es pasta dura.
c. Escoger un libro de pasta dura y ficción.

Resolución:

a. Pasta dura.
Ocho de los 20 libros son de pasta dura, así: $P(D) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

b. Ficción, dado que es pasta dura.
Dado que la condición del libro es pasta dura se reduce el espacio muestral a ocho. De los ocho, tres son de ficción, así: $P(F/D) = \frac{3}{8}$

c. Pasta dura y ficción.
Por la regla general de multiplicación de probabilidad, tenemos:

$$P(D \cap F) = P(D) \times P(F/D)$$

$$P(D \cap F) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{8}$$

$$P(D \cap F) = \frac{3}{20}$$

En este caso es fácil verificar si esta respuesta es correcta observando los datos en la tabla. Se tiene que 3 de los 20 libros son de “pasta dura y ficción”. Esto confirma que la probabilidad calculada por la regla general de la multiplicación de probabilidad es correcta.

Ejemplo 2

En esta tabla se muestran los ocho planetas considerados parte del Sistema Planetario Solar y su distancia media al Sol, en millones de kilómetros.

Rosina debe presentar un reporte astronómico en la escuela, para esto ella debe seleccionar dos planetas distintos. Si ella selecciona los planetas aleatoriamente, determina la probabilidad de que el primero tenga una distancia media al Sol menor de 200 millones de kilómetros y que el segundo tenga una distancia al Sol no menor de 200 millones de kilómetros ni mayor de 3 000 millones de kilómetros.

Distancia media de los planetas al Sol	
Mercurio	57,9
Venus	108,2
Tierra	149,6
Marte	227,6
Júpiter	778,3
Saturno	1 427
Urano	2 870
Neptuno	4 997

Resolución:

Sean los eventos:
A: Distancia al Sol menor de 200 millones de kilómetros,

A = {Tierra, Venus, Mercurio}

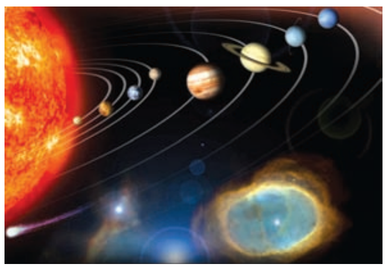
B: Distancia al Sol entre 200 y 3 000 millones de kilómetros,

B = {Marte, Júpiter, Saturno, Urano}

Entonces: $P(A) = \frac{3}{8}$

Un mate... de risa

Quino. (1992). Todo Mafalda. Barcelona. Lumen.



Sistema planetario solar. http://www.astroseti.org/imprime.php?codigo=2313

curiosidades matemáticas

¿ME DAS UN DÓLAR POR FAVOR?

Todos ustedes ya conocerán la historia (leyenda urbana tal vez) de que unos estudiantes de ingeniería realizaron un estudio para estimar, usando la Estadística, la recolección de dinero promedio que tendría un mendigo parado en un semáforo pidiendo 100 bolívares. Los números por ellos arrojados son bastante altos; de ser cierto el estudio, se entiende por qué estas personas proliferan en cualquier semáforo de cualquier ciudad de Venezuela.

La *web* también es el sitio idóneo para hacer negocios similares y a un personaje se le ocurrió una idea brillante; en vez de pedir en una esquina, lo que realizó fue crearse un *site* en la internet donde solicita que le regalemos un dólar americano y el mismo puede ser transferido vía segura usando su tarjeta de crédito. Entre las razones que expone para que le demos el dinero se encuentran:

a. Tengo casi 30…¡¡y todavía no soy millonario!!

b. ¿Aburrido de tener tanto dinero en tu cuenta de banco?

c. Es solamente un dólar.

d. Tú quieres hacer algo bueno por alguien.

e. Vamos…¡¡¡es solamente un dólar!!!

Lo interesante del negocio es que a este señor ya le han dado hasta el momento US 75 745 21.

http://zeitan.blogsome.com/2006/09/07/me-da-1-por-favor/

Como ya fue elegido un planeta, solo quedan siete para elegir.

Entonces: $P(B/A) = \frac{4}{7}$

Por la regla general de multiplicación, la probabilidad de elegir dos planetas con esas características es:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B/A) \rightarrow P(A \text{ y } B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} \rightarrow P(A \text{ y } B) = \frac{3}{14}$$

Ejemplo 3

Una compañía manufacturera compra dos grupos de máquinas a dos proveedores diferentes. El grupo I consiste en cuatro máquinas y el grupo II en seis máquinas. Las dos máquinas, que tienen la misma capacidad, se emplean para producir partes idénticas. De las partes producidas por las máquinas del Grupo I, el 5% son defectuosas (D), mientras que el 90% de las producidas por las máquinas del Grupo II, no son defectuosas (D^c). Supóngase que se selecciona aleatoriamente una máquina y se elige y examina una de las partes producidas. Determina cada una de las siguientes probabilidades conjuntas:

a. $P(I \cap D)$ b. $P(II \cap D)$

c. $P(I \cap D^c)$ d. $P(II \cap D^c)$

Resolución:

En este caso se tiene que $P(I) = 0{,}4$ y $P(II) = 0{,}6$

$P(D/I) = 0{,}05$; $P(D^c/I) = 0{,}95$; $P(D/II) = 0{,}10$; $P(D^c/II) = 0{,}90$

Entonces: a. $P(I \cap D) = P(I) \times P(D/I) = 0{,}4\,(0{,}05) = 0{,}02$

b. $P(II \cap D) = P(II) \,.\, P(D/II) = 0{,}6\,(0{,}10) = 0{,}06$

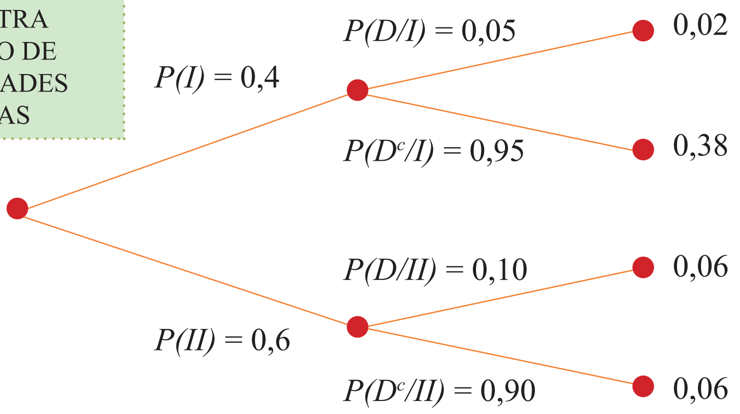
c. $P(I \cap D^c) = P(I) \,.\, P(D^c/I) = 0{,}4\,(0{,}95) = 0{,}38$

d. $P(II \cap D^c) = P(II) \,.\, P(D^c/II) = 0{,}6\,(0{,}90) = 0{,}54$

Las diferentes probabilidades involucradas en este ejemplo se muestran en el siguiente diagrama de árbol:

DIAGRAMA DE ÁRBOL QUE MUESTRA EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES CONJUNTAS

Probabilidades conjuntas



4.3 Eventos independientes

Se dice que dos eventos A y B son independientes si ninguno de ellos está condicionado por la ocurrencia del otro.

Luego, podemos afirmar que *A* y *B* son independientes si y solo si

$$P(B/A) = P(B) \text{ y } P(A/B) = P(A)$$

4.4 Regla especial de multiplicación de probabilidad

Si A y B son eventos independientes, entonces:

$$P(A \text{ y } B) = P(A).P(B) \rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Ejemplo 1

Sara extrae dos naipes de un mazo ordinario de 52 naipes, restituyendo el primer naipe antes de extraer el segundo. Determina la probabilidad de extraer dos reyes.

Resolución:

Sea el evento A: "Extraer dos reyes". Entonces:

$$P(A) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{52}\right) \rightarrow P(A) = \left(\frac{1}{13}\right)\left(\frac{1}{13}\right) \rightarrow P(A) = \frac{1}{169}$$

Como el primer naipe se reemplaza, la probabilidad de que la segunda carta extraída sea un rey sigue siendo $\frac{4}{52}$ aun cuando se haya seleccionado un rey en la primera extracción.

En general, el evento de extraer un objeto de un conjunto de objetos y el evento de realizar una extracción inmediata son independientes, siempre y cuando el objeto extraído la primera vez haya sido restituido.

Actividad 4

Reconoce y aplica las reglas de la probabilidad de la intersección de eventos, a través de la resolución de situaciones problemáticas, manifestando seguridad.

Trabajen en equipo dividiéndose equitativamente cada una de las siguientes situaciones presentadas, de manera responsable y puntual. Compartan sus resultados.

1. Lanzando dados

Se lanza tres veces un dado balanceado. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan seis puntos en todas las lanzadas?

2. Jugando al baloncesto

Un jugador de baloncesto, que suele encestar 70 de 100 tiros libres, tiene que lanzar una personal "uno más uno". Esto implica que solo si acierta el primer tiro, dispondrá de un segundo lanzamiento. Por tanto, es posible que consiga en la jugada 0 puntos (fallando el primer lanzamiento), 1 (encestando el primero y fallando el segundo) ó 2 (acertando los dos intentos).

a. ¿Qué es más probable que suceda?

b. Simularemos el lanzamiento utilizando de nuevo la función RAN de la calculadora:

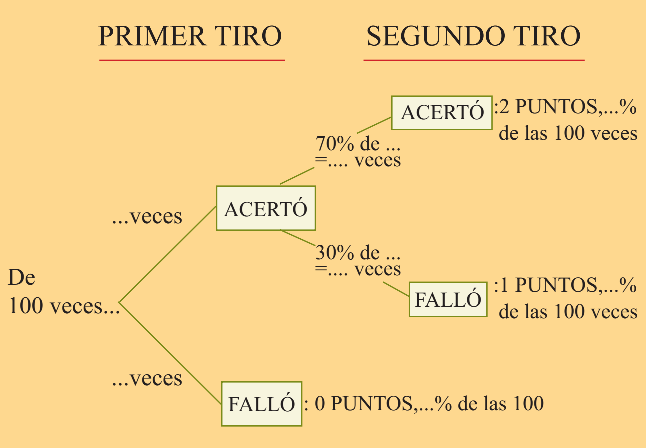
Nos fijaremos en los dos primeros decimales del número obtenido en pantalla. Si el primer decimal está comprendido entre el 1 y el 7, interpretaremos que ha encestado el primer tiro y si es un 8, 9 ó 0, que ha fallado. Análogamente, asociaremos el resultado del posible segundo intento al segundo decimal del número. Por ejemplo 0,283 lo interpretaremos como que encesta el primer tiro y falla el segundo.

Repetir 30 veces la simulación y anotar los resultados en una tabla.

c. Contesta a las siguientes cuestiones:
- ¿Es más probable obtener 0 que 2 puntos?
- ¿Es más probable obtener 0 que 1 punto?

- ¿Cuál es la probabilidad de fallar el primer lanzamiento?
- ¿Y la de acertarlo?
- ¿Cuál es la probabilidad de conseguir los 2 puntos si ya se ha logrado el primero?

d. Vamos a intentar calcular las probabilidades o frecuencias relativas esperadas de cada una de las tres posibilidades: imaginando que el lanzador va a repetir la jugada en cien ocasiones y, dando por hecho que acierta el 70 % de sus tiros, completa el siguiente diagrama de árbol:



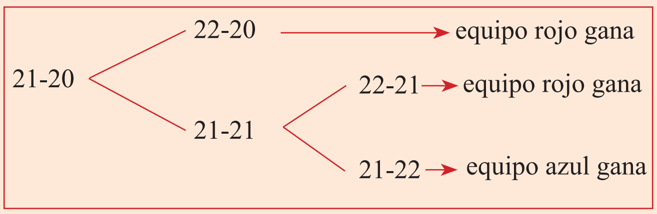
Por tanto: $P(2) = ...$; $P(1) = ...$; $P(0) = ...$

3. Apuestas en un partido de fútbol:

Dos amigos han apostado S/. 100 (cada uno) a que su equipo favorito gana el partido. El equipo azul ha anotado 20 goles y el equipo rojo 21 goles. Un jugador del equipo azul recibe un pelotazo en el ojo y resulta mal herido, esto obliga al árbitro a suspender el partido.

a. ¿Cuál te parece que debe ser el reparto más justo de los S/. 200 apostados? ¿Por qué?

b. Imagina que la misma situación se fuera a repetir 1 000 veces. Coloca en cada rama del siguiente "árbol" el número de veces que se podría esperar cada resultado (suponiendo a los dos jugadores igual de fuertes):



¿En qué porcentaje de ocasiones sería vencedor el equipo rojo? ¿Y el equipo azul?

c. Estima la probabilidad de que gane el equipo azul. ¿Cuál consideras entonces el reparto más justo de los S/. 200? ¿Por qué?

Sería conveniente una puesta en común de las distintas opiniones, pudiendo resolverse el problema teóricamente, o mediante una simulación con cuatro fichas, en el supuesto de que en cada tanto es igual de probable que gane uno como el otro.

d. Armando, que apostó por el equipo rojo, considera que le corresponden S/ 150. Sergio, que apostó por el equipo azul, no está conforme: admite que hay un 50% de probabilidad de que el equipo rojo ganase 22 a 20, pero argumenta que en el caso contrario, si llega al empate a 21, el equipo azul tendría ventaja por corresponderle el saque, además, en el mismo partido, a su jugador estrella, quien de 20 tantos en los que ha sacado, ha ganado 16 de ellos y solo ha perdido 4.

Según el punto de vista de Sergio, ¿cuál es la probabilidad de que si el equipo azul gana el primer tanto, también gane el segundo?

Si llamamos B_1 al suceso "que el equipo azul gane el primer tanto" y B_2 a "que el equipo azul gane el segundo", la probabilidad solicitada en la pregunta anterior se representa así: $P(B_2 | B_1)$ y se lee probabilidad del suceso B_2 condicionado al suceso B_1. ¿Qué representará $P(B_2 | B_1)$ y cuál será su valor?
Repite de nuevo la distribución de los 1 000 hipotéticos finales. ¿Cuál será el reparto justo propuesto por Sergio? ¿Y la probabilidad de que el equipo azul gane el partido?

Podría hacerse, en lugar de la distribución de los 1 000 hipotéticos casos, una simulación con 10 ó 20 fichas.

en grupo...

investiga *con tus compañeros*

En la cuadra donde vives, investiga la cantidad de personas que comen pan blanco, pan integral y ambos tipos de pan. Determina el porcentaje de cada evento, luego responde: ¿Cuál es la probabilidad de que no coma pan blanco, si se sabe que una persona consume pan integral?

5. Evaluación

1. Jugando a los dados

Carmen y Jorge son dos hermanos a quienes les gusta colaborar con las labores de la casa. Un día deciden lanzar los dados para determinar quién lavará los platos y quién limpiará la mesa. Si al lanzar los dados la diferencia entre ellos es de 0, 1 ó 2, entonces Carmen lava los platos y Jorge limpia la mesa. Y si la diferencia es de 3, 4 ó 5, Jorge lava y Carmen limpia.

a. ¿Crees que se trata de un sorteo equitativo? Si tuvieras que participar en él, ¿qué opción preferirías?

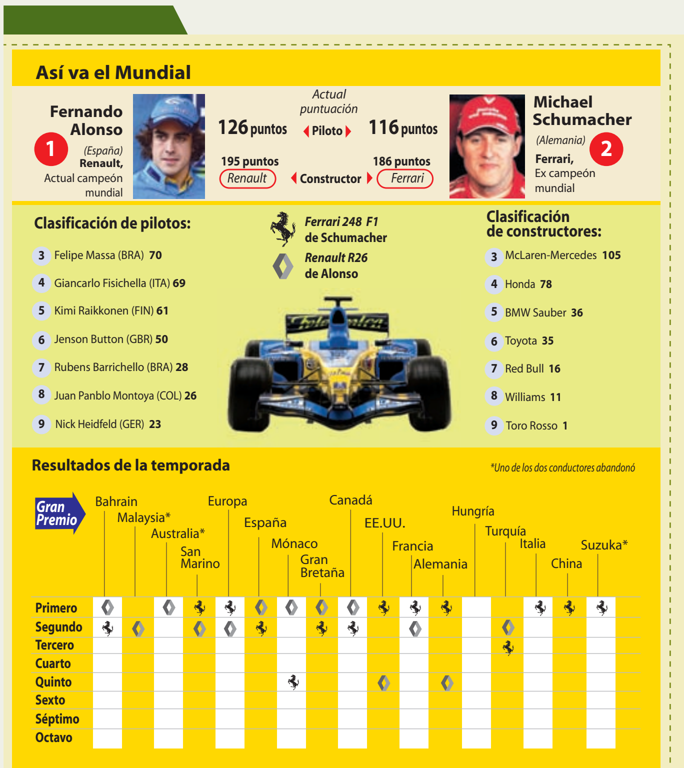
b. Elige a un compañero de tu clase y realiza el sorteo lanzando 25 veces los dados. Anota los resultados en una tabla. A la vista de los resultados, ¿confirmas tus primeras opiniones del apartado a.?

c. Considerando el experimento aleatorio de lanzar dos dados y anotar la diferencia, el espacio muestral será $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Comprueba si las probabilidades que has estimado cumplen que: $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1$.

d. Construye una tabla de doble entrada en la cual se representen todas las formas posibles de obtener cada diferencia. Ten en cuenta que, si los dados no están trucados, la probabilidad de cada una de las 36 parejas de resultados es la misma. Si se lanzan los dos dados 1 000 veces, ¿alrededor de cuántas veces cabe esperar que salga el "seis doble"? ¿Y que la diferencia de los dados sea 5?

e. Observando la tabla que construiste, calcula de nuevo las probabilidades anteriores: $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, P(que gane el 1º) y P(que gane el 2º).

2. Duelo histórico



El Comercio, viernes 20 de octubre, 2006.

Dado el anterior recorte periodístico, resuelve las siguientes cuestiones:

a. Elabora una tabla de frecuencias, considerando los resultados de la temporada de dos grandes del automovilismo mundial.

b. Calcula la probabilidad de las veces que ganó cada uno de ellos.

c. Explica cuál de los dos tiene menor probabilidad de perder. Justifica tu respuesta.

d. Calcula la probabilidad de que ganen ambos a la vez.

Z_S1 fasc8-14 dic.indd 29 5/30/07 8:37:51 AM

6. Metacognición

Metacognición es la habilidad de pensar sobre el discurso del propio pensamiento, es decir, sirve para darnos cuenta cómo aprendemos cuando aprendemos.

Responde en una hoja aparte:

1. ¿De qué manera te organizaste para leer el fascículo y desarrollar las actividades propuestas?
2. ¿Te fue fácil comprender el enunciado de las actividades? ¿Por qué?
3. Si no te fue fácil, ¿qué hiciste para comprenderlo?
4. ¿Qué pasos has seguido para desarrollar cada una de las actividades?
5. ¿Cuáles de estos pasos te presentaron mayor dificultad?
6. ¿Cómo lograste superar estas dificultades?
7. Al resolver la evaluación, ¿qué ítems te presentaron mayor dificultad?
8. ¿Qué pasos has seguido para superar estas dificultades?
9. ¿En qué acciones de tu vida te pueden ayudar los temas desarrollados en este fascículo?
10. ¿Qué nivel de logro de aprendizaje consideras que has obtenido al finalizar este fascículo?

Muy bueno	Bueno	Regular	Deficiente
	NO ESC	RIBIR	

¿Por qué?

11. ¿Crees que las actividades de investigación fueron realmente un trabajo de equipo? Explica.
12. ¿Tuviste la oportunidad de compartir tus conocimientos con algunos de tus compañeros? ¿Qué sentimientos provocaron en ti este hecho?

BIBLIOGRAFÍA *comentada*

1. Johson, Robert y Kuby, Patricia. **Estadística elemental**. México. International Thomson Editores, 2004.

   En la segunda parte, se profundiza la terminología básica para poder realizar el estudio de la probabilidad, así como sus reglas y leyes aplicadas a eventos simples y compuestos.

2. Lincoln, Chao. **Introducción a la Estadística**. México. Compañía Editorial Continental S.A. de C.V., 1985.

   En el capítulo 4, “Evento y probabilidad”, se hace un estudio teórico y práctico sobre los resultados, eventos aleatorios y reglas para contar eventos; cada uno de estos con sus respectivos ejemplos.

3. Marqués de Cantú, María José. **Probabilidad y estadística**. México. Editorial Mc Graw Hill Interamericana, 1990.

   En el capítulo 2 se propone el estudio profundo de la probabilidad y las leyes que la rigen, a través de una serie de procedimientos: tabla de contingencia, diagrama de árbol, reparto proporcional, etc.

4. Montiel, A. y otros. **Estadística**. Madrid. Editorial Prentice Hall International ltd, 1997.

   En el capítulo IX, se relaciona la probabilidad con la frecuencia relativa y, a partir de ella, define la probabilidad, los diferentes tipos de sucesos, propiedades y leyes.

5. Pliego López y otros. **Estadística I. Probabilidad**. Madrid. Editorial Alfa Centauro. 2002.

   El capítulo 1, “Probabilidad”, está integrado por las teorías sobre la probabilidad, y nos permitirá tener una visión amplia y profunda sobre la finalidad del estudio matemático del azar.

6. Stewart, James y otros. **Precálculo**. México. Editorial International Thomson S.A, 2001.

   Versión en español. Aquí, en el capítulo 11, se hace una introducción al tema de conteo y probabilidad a través de diversos problemas contextualizados y prácticos, que permiten su mayor comprensión. Además, se utiliza el modelado matemático.

7. S.T. Tan. **Matemática para la Administración y Economía.** México. Editorial International Thomson S.A, 1998.

   En los capítulos 7 y 8, se definen los conceptos relativos a los conjuntos para estudiar la probabilidad. Después se explica cada una de las reglas, con sus respectivos ejemplos aplicados a la vida diaria, con el objeto de calcular la probabilidad de ocurrencia de ciertos eventos.

Enlaces *web*

1. *http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ4(2)_serrado_etal.pdf*

   Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto.

2. *http://ddm.ugr.es/personal/pflores/textos/aRTICULOS/Propuestas/Humorazar.pdf*

   Humor gráfico para la enseñanza y el aprendizaje del azar.

3. *http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/BATANERORelime.pdf*

   Significados de la probabilidad en la Educación Secundaria.

4. *http://www.ugr.es/~batanero/ListadoProbabilidad.htm*

   Estudios sobre didáctica de la probabilidad.

5. *http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/azar/probabilidad.zip*

   Considera teoría y práctica sobre probabilidades.

6. *Español.geocities.com/eprobabilidades/*

   Presenta definiciones básicas y técnicas de conteo.

7. *www.fisterra.com/mbe/investiga/probabilidades/*

   Presenta conceptos, propiedades y algunas aplicaciones

8. *www.dei.es/oim/revición/numero21*

   Documento de consulta sobre un desarrollo más formal sobre la posibilidad.
   Presenta problemas resueltos.